Exposición Eliminación Cuantificadores RCF
Curso: Teoría de Modelos
Profesor: Andrés Villaveces

Presentada por: Walther Muete

5 de octubre de 2006

I DEFINICIONES ALGEBRAICAS

1. Definición: Decimos que un cuerpo F es ordenable si hay un orden lineal $<$ en F tal que hace a $(F, <)$ un cuerpo ordenado.
2. Ejemplo:$\mathbb{Q}(x)$ es un cuerpo con una cantidad no contable de órdenes.
3. Defención: Decimos que un cuerpo es formalmente real si -1 no es suma de cuadrados.
4. Ejemplo: Claramente $\mathbb{Q}(x)$, $\mathbb{R}$ son cuerpos formalmente reales. $\mathbb{C}$ y $\mathbb{F}p$ con p un número primo, no son cuerpos formalmente reales.
5. Definición: Decimos que un cuerpo F es real cerrado si no tiene extensiones propias formalmente reales.
6. Ejemplo:$\mathbb{R}$ es el ejemplo canónico.
7. Definición: Decimos que F un cuerpo formalmente real, tiene como clausura real a R, si R es una extensión algebraica real cerrada de F.

II DEFINICIONES TEORÍA DE MODELOS

1. Definición: $L_r = \{+, ., 0, 1\}$ el cual es el lenguaje de los anillos.
2. Definición: $L_{or} = \{+, ., 0, 1, <\}$ el cual es el lenguaje de los anillos ordenados.
3. Definición: Sea $\mathcal{T}$ una teoría, decimos que $\mathcal{T}_\forall$ es el conjunto de consecuencias universales de $\mathcal{T}$.
4. Definición: Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son modelos de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ decimos que $\mathcal{M}$ es simplemente cerrado en $\mathcal{N}$ y escribimos $\mathcal{M} \prec_s \mathcal{N}$ si para toda fórmula $\phi(\bar{v}, w)$ sin cuantificadores y $\bar{a} \in \mathcal{M}$, si $\mathcal{N} \models \exists w \phi(\bar{a}, w)$ entonces $\mathcal{M} \models \exists v \phi(\bar{a}, v)$.

5. Definición: Una teoría posee modelos algebraicamente primos si para todo $\mathcal{A} \models \mathcal{T}_\forall$ existe $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$ y un sumergimiento $i : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ tal que para todo $\mathcal{N} \models \mathcal{T}$ y sumergimiento $j : \mathcal{A} \to \mathcal{N}$existe $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ tal que $j = h \circ i$.

III HECHOS ALGEBRAICOS

Los hechos a continuación presentados se encuentran el álgebra de Lang.

1 Teorema: Si F es un cuerpo formalmente real, entonces F es ordenable, de aquí $a \in F$ y $-a \in F$ no son sumas de cuadrados de F.

El siguiente teorema fue un aporte interesante presentado por Artin y Scheier el cual nos permite dar una axiomatización apropiada a RCF.

2 Teorema: Sea F un cuerpo formalmente real, las siguientes condiciones son equivalentes:

- I. F es real cerrado.
- II. $F(i)$ es algebraicamente cerrado donde $i^2 = -1$.
- III. Para algún $a \in F$ o $-a \in F$ es un cuadrado y todo polinomio de grado impar tiene raíz en F.

3 Teorema: Un cuerpo F es real cerrado si y sólo si $p(x) \in F[x]$, $a, b \in F$ con $a < b$ y $p(a).p(b) < 0$ entonces existe $c \in F$ tal que $a < c < b$ y $p(c) = 0$.

4 Lema: Si $(F, <)$ es un cuerpo ordenado, $0 < x \in F$ y x no es un cuadrado en F entonces podemos extender el orden de F a $F[x]$.

Demostración: Los elementos de $F[x]$ son de la forma $a + b\sqrt[2]{x}$, decimos que $0 < a + b\sqrt[2]{x}$ si y sólo si:

- I. $b = 0 \wedge a > 0$,$\vee$,
- II. $b > 0 \wedge (a > 0 \vee x > \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2})$,$\vee$,
- III. $b < 0 \wedge (a < 0 \wedge x < \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2})$.

5 Lema: Si $(F, <)$ es un cuerpo ordenado, hay una clausura real R de F tal que el orden canónico de R extiende al orden de F.

Demostración: Aplicando el lema anterior reiteradas veces podemos encontrar un cuerpo $(L, <)$ que extiende a $(F, <)$ y de tal forma que posee las raíces cuadradas de los elementos positivos de F, por el lema de Zorn podemos obtener una extensión máximal formalmente real R de L, Dado que todo elemento positivo de F es un cuadrado en R, el orden canónico de R extiende al orden de F.

6 Teorema: Si $(F, <)$ es un cuerpo ordenado, y R_1 y R_2 son clausuras reales de F donde estas poseen un orden canónico que extiende el orden de F, entonces hay un único isomorfismo de cuerpos $\phi : R_1 \to R_2$ que es la identidad en F.

IV HECHOS EN TEORÍA DE MODELOS

Por el Teorema 2 de los hechos algebraicos tenemos que la siguiente es la axiomatización de RCF.

I. Axiomas de cuerpos.

II. Para cada $1 \leq n$ el axioma: $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2 + 1 \neq 0$

III. $\forall x \exists y (x = y^2, \vee, x + y^2 = 0)$

IV. Para cada $1 \leq n$ el axioma: $\forall x_0 \cdots \forall x_{2n} \exists y (y^{2n+1} + \sum_{i=0}^{2n} x_i y^i = 0)$

V. El orden es axiomatizable mediante la sentencia:

$$\forall x \forall y (x < y \Leftrightarrow \forall z (z^2 + x = y, \wedge, z \neq 0)$$

El siguiente es un hecho que se deriva de la definición de $\mathcal{T}_\forall$, Si $\mathcal{A} \models \mathcal{T}_\forall \Leftrightarrow \exists \mathcal{M} \models \mathcal{T}$ con $A \subseteq M$. La implicación de izquierda a derecha es sencilla, La otra es un ejercicio.

El siguiente criterio de eliminación es tomado del Libro Model Theory: An introduction de David Marker. Sea T una teoría sobre L tal que:

I. T tiene modelos algebraicamente primos.

II. $\mathcal{M} \prec_s \mathcal{N}$ siempre y cuando $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ y $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$

Entonces T admite eliminación de cuantificadores.

V DEMOSTRACIONES DE ALGUNOS HECHOS Los siguientes hechos nos permitiran afirmar que la teoría RCF admite eliminación de cuantificadores.

1 Lema $RCF_\forall$ es la teoría de los dominios de integridad ordenados.
Demostración: Claramente una estructura que es un cuerpo real cerrado es un dominio de intergridad. Si $(D, <)$ es un dominio de integridad y F es el cuerpo de fracciones de D, entonces podemos ordenar a F por la relación: $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} > 0 \Leftrightarrow a > 0, b > 0$ o bien $a < 0, b < 0$ por el Lema 6 de los hechos algebraicos tenemos que podemos encontrar $(R, <) \models RCF$ y $(F, <) \subseteq (R, <)$.

2 Teorema RCF tiene modelos algebraicamente primos.
Demostración: Sea $(D, <)$ un dominio de integridad ordenado y $(R, <)$ la clausura real del cuerpo de fracciones compatible con el orden de D, sea $(F, <)$ una extensión real cerrada de $(D, <)$, sea: $K = \{\alpha \in F \mid \alpha$ es algebraico sobre el cuerpo de fracciones de $D\}$. Por el Teorema 2 responsable de la axiomatización tenemos que K es real cerrado y extiende a $(D, <)$ por el teorema 6 de los hechos algebraicos tenemos que existe un isomorfismo que fija a D.

3 Observaciones:

a Nótese que RCF no tiene eliminación de cuantificadores en L_r ya que la sentencia que define el orden no es eliminable, en el sentido que no hay una cantidad finita de fórmulas bajo conjunción y disjunción que expresen este hecho.

b Todo conjunto definible en L_{or} es definible en L_r.

VI TEOREMA CENTRAL

RCF admite eliminación de cuantificadores en L_{or}.

Demostración: Dado que RCF tiene modelos algebraicamente primos, usando el criterio de eliminación de cuantificadores presentado basta sólo con ver que $F \prec_s K$ siendo $F, K \models RCF$ y $F \subseteq K$.

Sea $\phi(v, \bar{w})$ una fórmula sin cuantificadores y sea $\bar{a}$, $b \in K$ tal que $K \models \phi(b, \bar{a})$, debemos encontrar un $c \in F$ tal que $F \models \phi(c, \bar{a})$.Nótese que para un polinomio en un cuerpo real cerrado tenemos que:

$$p(\bar{x}) \neq 0 \Leftrightarrow (p(\bar{x}) > 0, \vee, -p(\bar{x}) > 0)$$

$$p(\bar{x}) \not> 0 \Leftrightarrow p(\bar{x}) = 0, \vee, -p(\bar{x}) > 0).$$

Bajo este argumento, podemos afirmar que la formula ϕ es una disjunción de conjunciones de la forma $p(v, \bar{w}) = 0$ o $p(v, \bar{w}) > 0$, por lo tanto existen porlinomios $p_1, \cdots, p_n$ y $q_1, \cdots, q_m$ en $F[x]$ tales que:

$$\phi(v, \bar{w}) \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} p_i(v) = 0, \wedge, \bigwedge_{j=1}^{m} q_j(v) > 0$$

Si alguno de estos polinomios $p_i(v)$ no es cero, entonces b es algebraico sobre F, dado que F no tiene extensiones formalmente reales entonces b está en F, por lo tanto podemos asumir que:

$$\phi(v, \bar{w}) \Leftrightarrow \bigwedge_{j=1}^{m} q_j(v) > 0$$

los polinomios q_j sólo pueden cambiar de signo en sus ceros, si todos los ceros de estos polinomios están en F, entonces podemos encontrar c_j, d_j en F tales que $c_j < b < d_j$ y $q_j(x) > 0$ para $c_j < x < d_j$, sea $c = \text{máx}\{c_1, \cdots, c_m\}$ y $d =\text{mín}\{d_1, \cdots, d_m\}$, entonces $c < d$ y $\bigwedge_{j=1}^{m} q_j(x) > 0$ siempre y cuando $c < x < d$, por lo tanto podemos encontrar c en F tal que $F \models \phi(c, \bar{a})$.

Ya que hemos verificado las condiciones del criterio, tenemos que RCF admite eliminación de cuantificadores en el lenguaje de los anillos ordenados, en consecuencia es completa.